REZOLVARI VARIANTE MT2 – 2009
SUBIECTUL I

Varianta 1

(1) $C_3^2 + 3! = \frac{3!}{2! \cdot 1!} + 6 = 3 + 6 = 9.$

(2) Pentru ca sa aiba sens logaritmul, trebuie ca $3x + 4 > 0 \to 3x > -4 \to x \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$

$\log_5(3x+4) = 2 \Rightarrow 3x + 4 = 5^2 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7.$

(3) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_2 \cdot x_1} = \frac{S}{P} = \frac{-b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{-b}{c} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$, unde a,b,c sunt coeficientii ecuatiei de gradul 2 din problema, iar S si P (conform relatiilor lui Viete) sunt suma, respectiv produsul acestora : $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow a = 1; b = -1; c = -2.$

(4) Pentru f(x) = - x^2,avem a = -1, b = 0 si c = 0.

$\Rightarrow$Cum a este negativ, varful parabolei reprezinta maximul acesteia, si se localizeaza in : $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{0}{-4} = 0.$ Reprezentarea grafica a functiei va fi deci o parabola situata sub Ox. Astfel, pentru $x \in [0,1]$, cum functia este continua si pe intervalul definit in problema strict crescatoare, deducem ca functia functia va lua toate valorile intre f(0) si f(1).

$f(0) = 0; f(1) = -1 \Rightarrow$ Imf=[-1,0].

(5) $\overrightarrow{AB} = (-1-2) \cdot \vec{i} + (3+1) \cdot \vec{j} = -3\vec{i} + 4\vec{j} \to a = -3, b = 4.$ Se calculeaza astfel, intrucat pentru a determina coeficientii versorilor $\vec{i}$ si $\vec{j}$ este nevoie sa calculam diferenta dintre coordonatele punctelor ce formeaza vectorul respectiv.

(6) Folosind teorema cosinusului, obtinem :

$$\cos \hat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{16 + 3 - 7}{8\sqrt{3}} = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to m(\hat{B}) = \frac{\pi}{6}.$$

Varianta 2

(1) Radacina lui f(x) se determina astfel :

$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow f(3)=0 \Rightarrow f(-4)\cdot f(-3)\cdot ... \cdot f(3)\cdot f(4)=0.$

(2)

$\log_2(x+2)+\log_2 x=3 \Rightarrow \log_2[x(x+2)]=3 \Rightarrow x(x+2)=8 \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow x^2-2x+4x-8=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x-2)+4(x-2)=0 \Rightarrow (x-2)(x+4)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$Radacinile sunt $x_1=2$ si $x_2=-4$, respectandu-se insa conditiile de existenta conform carora $x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow x\in(-2,\infty)$ si $x>0 \Rightarrow x\in(0,\infty)$. Din intersectia acestora rezulta ca sigura solutie valabila este x = 2.

(3) $x^2-5x+5\le 1 \Rightarrow x^2-5x+4\le 0 \Rightarrow x^2-4x-x+4\le 0 \Rightarrow x(x-4)-(x-4)\le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)\le 0 \Rightarrow$

x	$-\infty$ 1 4 $+\infty$
f(x)	+++++0------0+++++++

Radacinile sunt $x_1=4$ si $x_2=1$. Cum rezultatele ecuatiei trebuie sa fie mai mici sau egale cu 0 si a = 1 (a>0), inseamna ca multimea de solutii apartine intervalului incastrat intre radacinile obtinute$\Rightarrow x\in[1,4]$,dar $x\in Z \Rightarrow x\in\{1,2,3,4\}$.

(4) Ratia din aceasta progresie aritmetica este :

$r=3^{x+1}-3^x+1=3^x(3-1)+1=2\cdot 3^x+1.$

Rezulta ca daca si in urmatorul caz ratia este aceeasi, atunci termenii sunt consecutivi. Verificam : $p=5\cdot 3^x+1-3^{x+1}=3^x(5-3)+1=2\cdot 3^x+1=r \rightarrow$ Adevarat.

(5) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(4-0)\vec{i}+(-8-0)\vec{j}+(6-0)\vec{i}+(3-0)\vec{j}=10\vec{i}-5\vec{j} \rightarrow$ Vectorul $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (10,-5).

(6) Aria $\Delta ABC=\dfrac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}=\dfrac{2\cdot 4\cdot \frac{1}{2}}{2}=2.$

Varianta 3

(1) Sirul este o progresie aritmetica de ratie r = 7 – 1 = 6, rezulta ca al zecelea termen al sirului va fi a_{10} = 1 + 9r = 55 .

(2) Intrucat multimea din care trebuie sa alegem cifrele pentru numar este formata din 2 elemente, si trebuie sa formam numere cu cate 3 cifre , inseamna ca sunt 2^3 numere posibil de format, adica 8. Dintre acestea insa , doar 2 dintre ele sunt divizibile cu 3 (pentru a fi un numar divizibil cu 3, trebuie ca suma cifrelor acestuia sa fie ea insasi divizibila cu 3) si anume 111, si 222. Probabilitatea se calculeaza prin raportarea numarului de cazuri favorabile la cel de cazuri posibile. Se obtine astfel :

$p=\frac{2}{8}=0,25 \to 25\%$ sanse.

(3) Pentru ca radicalul sa aiba sens, deducem conditia de existenta $x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow x \in (-2,\infty)$

$\sqrt{2+x}=x\,|^2 \Rightarrow 2+x=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x^2+x-2x-2=0 \Rightarrow x(x+1)-2(x+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow$ Radacinile sunt x_1 = -1 si x_2 = 2,ambele valabile.

(4) $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)=-3-1+1+3=0.$

(5) Calculam panta dreptei (m).

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2+1}{1-2}=1.$$

Ecuatia dreptei este : $y - y_A = m\,(x - x_A)$

$\Rightarrow y+1=1(x-2) \Rightarrow y+1-x+2=0 \Rightarrow y-x+3=0 \Rightarrow x-y-3=0.$

(6) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Varianta 4

(1) $(x-1)^2+x-7<0 \Rightarrow x^2-2x+1+x-7<0 \Rightarrow x^2-x-6<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+2x-3x-6<0 \Rightarrow x(x+2)-3(x+2)<0 \Rightarrow (x+2)(x-3)<0 \Rightarrow$

x	-inf -2 3 +inf
f(x)	+++++0------0+++++++

Radacinile sunt x_1 = -2 si x_2 = 3. Cum rezultatele ecuatiei trebuie sa fie mai mici decat 0 si a = 1 (a>0), inseamna ca multimea de solutii apartine intervalului incastrat intre radacinile obtinute $\Rightarrow x \in (-2,3)$,dar $x \in Z \Rightarrow x \in \{-1,0,1,2\}$.

(2) r = $a_2 - a_1$ = 3 – 1 = 2. Suma primilor 5 termeni este obtinuta din formula :

$$S=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=\frac{(1+1+4\cdot 2)\cdot 5}{2}=\frac{10\cdot 5}{2}=25.$$

(3) Daca valoarea maxima a functiei este 5, inseamna ca varful $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ este maximul pe care-l atinge functia, astfel incat

$$-\frac{\Delta}{4a}=5 \Rightarrow \frac{-64-12m}{4m}=5 \Rightarrow -64-12m=20m \Rightarrow -64=32m \Rightarrow m=-2.$$

(4) Conditiile de existenta ale logaritmilor sunt :

$\begin{cases} x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow x\in(-2,\infty) \\ x-5>0 \Rightarrow x>5 \Rightarrow x\in(5,\infty) \end{cases}$ Din intersectia acestora $\Rightarrow x \in (5,\infty)$.

$$\Rightarrow \log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3 \Rightarrow \log_2\frac{x+2}{x-5}=3 \Rightarrow \frac{x+2}{x-5}=8 \Rightarrow x+2=8x-40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 42=7x \Rightarrow x=6, valabila.$$

(5) Daca 2 vectori ce sunt exprimati prin versori sunt coliniari, atunci coeficientii versorilor celor 2 vectori sunt proportionali.

$$\frac{3}{2}=\frac{a-2}{a} \Rightarrow 3a=2a-4 \Rightarrow a=-4.$$

(6) Aplicam teorema sinusurilor in triunghi :

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{AB}{\sin C}=2R \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{2}}=2R \Rightarrow R=3.$$

Varianta 5

(1) $|x+1| \le 2 \Rightarrow -2 \le x+1 \le 2 \Big| -1 \Rightarrow -3 \le x \le 1 \Rightarrow x \in \{-3,-2,-1,0,1\}$ $\Rightarrow$5 elemente.

(2) Singurele numere rationale din acea multime sunt $\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}$. Inseamna ca probabilitatea sa extragem un numar rational din acea multime este $p = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 10\%.$

(3) $2f(x) + 3g(x) = -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x+3) + 3(2x-1) = -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 6 + 6x - 3 = -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x + 3 = -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1.$

(4) $p - 20\% p = 320 \Rightarrow p - \frac{p}{5} = 320 \Rightarrow \frac{4p}{5} = 320 \Rightarrow 4p = 1600 \Rightarrow p = 400.$

(5) $5\vec{u} + 3\vec{v} = 5(-3\vec{i} + 2\vec{j}) + 3(5\vec{i} - \vec{j}) = -15\vec{i} + 10\vec{j} + 15\vec{i} - 3\vec{j} = 7\vec{j}. \Rightarrow$ Coordonatele sunt (0,7).

(6) Intr-un triunghi dreptunghic, stim ca ipotenuza este egala cu dublul medianei din varful unghiului drept $\Rightarrow BC = 2AD = 2 \cdot 5 = 10.$

Conform teoremei lui Pitagora intr-un triunghi dreptunghic, obtinem ca $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AB = 8.$

Varianta 6

(1) $a+b=4\,|^2 \Rightarrow (a+b)^2=16 \Rightarrow a^2+2ab+b^2=16 \Rightarrow a^2+b^2=16-2ab \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2=16-2\cdot 3 \Rightarrow a^2+b^2=10.$

(2) Graficele functiilor f si g au puncte de intersectie daca si numai daca la egalarea celor doua functii (adica sa aiba acelasi f(x)) se poate extrage cel putin o radacina reala.

$\Rightarrow f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-x+1=x+4 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+x-3x-3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x+1)-3(x+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)(x-3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Radacinile sunt $x_1=-1$ si $x_3=3.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Punctele de coordonate (-1,g(-1)) si (3,g(3)) , apartin ambelor grafice $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Punctele sunt (-1,3) si (3,7).

(3) Daca sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, inseamna ca diferenta dintre ei , doi cate doi (adica ratia), trebuie sa fie egala.

$$\Rightarrow \frac{3}{2}-\lg\sqrt{x}=\lg x-\frac{3}{2} \Rightarrow \lg x+\lg\sqrt{x}=3 \Rightarrow \lg x\sqrt{x}=3 \Rightarrow \lg x^{\frac{3}{2}}=3 \Rightarrow \frac{3}{2}\lg x=3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lg x=2 \Rightarrow x=100.$

(4) Singurele numere rationale din multimea respectiva sunt $\sqrt{4},\sqrt{9}$ (adica 2 numere) din totalul de 9 posibile, deci probabilitatea ca alegand un numar acesta sa fie rational este de :

$$p=\frac{2}{9}.$$

(5) Cele doua drepte sunt paralele daca si numai daca pantele celor 2 sunt egale (m_1 si m_2) sau daca coeficientii pe care ii au x si y sunt proportionali. Astfel :

$$\frac{2}{a}=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=-4.$$

(6) Conform teoremei cosinusului , obtinem :

$$\cos\hat{B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2BC\cdot AB}=\frac{1+5-4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Varianta 7

(1) Conform relatiilor lui Viete, stim ca:

$S=\frac{-b}{a}, P=\frac{c}{a}$, unde a = 1 , b = -2 si c = -2.

$\Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2=S+P=\frac{2}{1}+\frac{-2}{1}=0.$

(2) $f(x)-1\geq 4x \Rightarrow 3-4x-1\geq 4x \Rightarrow 2\geq 8x \Rightarrow x\leq \frac{1}{4} \Rightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right].$

(3) x este sub radical $\Rightarrow x\geq 0 \Rightarrow x\in[0,\infty)$.

$3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} \rightarrow 3^{x-2}=\left(3^{-1}\right)^{\sqrt{x}} \rightarrow 3^{x-2}=3^{-\sqrt{x}} \rightarrow x-2=-\sqrt{x}\,|\cdot(-1) \rightarrow 2-x=\sqrt{x}\,|^{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4-4x+x^2=x \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x^2-x-4x+4=0 \Rightarrow x(x-1)-4(x-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow$

Conditia de existenta a ecuatiei $2-x=\sqrt{x}$ este : $2-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2,\ x\in[0,\infty) \Rightarrow$ din intersectia celor 2 conditii rezulta ca $x\in[0,2]$

$\Rightarrow$ Radacinile sunt $x_1=1(\in[0,2])$ si $x_2=4(\notin[0,2])$, deci singura solutie valabila este x=1.

(4) $\log_3 27-\log_2 8=3-3=0.$

(5) Dreptele AB si CD sunt paralele, inseamna ca pantele acestora sunt egale :

$m_1=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1-a}{2-a}=-1-a$ si $m_2=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{-2-2}{1-3}=2.$

$\Rightarrow m_1=m_2 \Rightarrow -1-a=2 \Rightarrow -3=a \Rightarrow a=-3.$

(6) Folosind teorema cosinusului, obtinem :

$\cos\hat{A}=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{25+36-49}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}.$

Varianta 8

(1) $1+3+5+...+13=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=\frac{(1+13)\cdot 7}{2}=\frac{14\cdot 7}{2}=49.$

(2) Daca punctul in discutie are abscisa egala cu ordonata, inseamna cu x = f(x).
$\Rightarrow x=f(x)\rightarrow x=2x+1\Rightarrow -1=x\Rightarrow x=-1.$ Deci punctul are coordonatele (-1,-1).

(3) $2^x+2^{x+3}=36\Rightarrow 2^x(1+8)=36\Rightarrow 2^x=4\Rightarrow x=\log_2 4\Rightarrow x=2.$

(4) $A_4^4+C_4^4=\frac{4!}{0!}+\frac{4!}{4!\cdot 0!}=24+1=25.$

(5) Calculam panta dreptei 4x+2y+5=0. Luam 2 valori la intamplare care sa apartina acestei drepte, astfel :

$$x_A=0\Rightarrow 2y_A=-5\Rightarrow y_A=\frac{-5}{2}$$

$$x_B=1\Rightarrow 2y_B=-9\Rightarrow y_B=\frac{-9}{2}.$$

Deci panta acestei drepte va fi :

$$m_1=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{-9+5}{2}}{1-0}=\frac{-4}{2}=-2.$$

Inseamna ca si panta celei de-a doua drepte va fi tot egala cu -2.
Astfel, ecuatia dreptei va fi :

$$y-y_0=m_2(x-x_0)\Rightarrow y-1=-2(x-1)\Rightarrow y-1=-2x+2\Rightarrow 2x+y-3=0.$$

(6) Pentru aducerea din catranul 2 in primul cadran se foloseste egalitatea :

$$\sin(130^O)=\sin(180^O-130^O).$$

Egalitatea devine deci :

$$\sin(180^O-130^O)^2+\cos(50^O)^2=\sin(50^O)^2+\cos(50^O)^2=1.$$

Varianta 9

(1) $\log_3 9 - \log_2 8 = \log_4 \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_3 3^2 - \log_2 2^3 = \log_4 4^{-1} \Leftrightarrow 2-3=-1 \Leftrightarrow -1=-1 \Rightarrow$ Adevarat.

(2) Pentru ca ecuatia sa aiba solutii reale , inseamna ca $\Delta \geq 0.$

Astfel, pentru ecuatia $x^2+2mx+4m=0$ **,**

$$\Delta = 4m^2 - 16m \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow m(4m-16) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Radacinile pentru m ale ecuatiei de mai sus sunt : $m_1 = 0$ si $m_2 = 4. \Rightarrow$

$\Rightarrow$Semnul functiei $4m^2 - 16 \geq 0$ va fi :

x	-inf 1 4 +inf
f(x)	+++++0------0+++++++

$\Rightarrow m \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty).$

(3) $\sqrt[3]{x^2-x-3} = -1 \Big|^3 \Rightarrow x^2-x-3=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+x-2x-2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x+1)-2(x+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Radacinile ecuatiei sunt : $x_1 = -1$ si $x_2 = 2.$

(4) Rata dobanzii este : $d = \frac{80}{1000} \cdot 100 = 8\%$

(5) $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow$Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt (1,1), adica exact coeficientii versorilor. Atunci : $\begin{cases} x_B - x_A = 1 \Rightarrow x_B = 1+3=4. \\ y_B - y_A = 1 \Rightarrow y_B = 1+4=5 \end{cases} \Rightarrow B(4,5)$, unde x_B si x_A , y_A si y_B sunt coordonatele celor 2 puncte A si B, relatia avand loc deoarece $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A; y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A.$

(6) $S = AB \cdot AD \cdot \sin A = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}.$

Varianta 10

(1) $a_4 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-1} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3} = 1.$

(2) $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x-1)^2 + 2(2x-1) - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{4}{4} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$Solutiile ecuatiei sunt : $x_1 = -1$ si $x_2 = 1$

(3) Substituim p=2^x :

$\to p^2 - 3p + 2 = 0 \to$

$\to p^2 - p - 2p + 2 = 0 \to$

$\to p(p-1) - 2(p-1) = 0 \to$

$\to (p-1)(p-2) = 0 \to$

$\to$ Solutiile sunt :

$p_1 = 1 \to 2^{x_1} = 1 \to x_1 = \log_2 1 \to x_1 = 0$ si $p_2 = 2 \to 2^{x_2} = 2 \to x_2 = \log_2 2 \to x_2 = 1.$

(4) $a = C_4^1 + C_4^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} + \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 8.$

$b = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8.$

$\to a = b.$

(5) $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u} = 2(3\vec{i} + 4\vec{j}) - 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{i} + 9\vec{j} = 17\vec{j} \to$ Coordonatele sunt (0,17).

(6) $S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = 15 \to 60 \sin A = 30 \to \sin A = \frac{1}{2}.$